

Concours en Mathématiques Physique
Correction de l'Épreuve de Mathématiques I



Partie I: (28 points)

On pose

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1° Montrer que Φ est de classe C^1 et impaire sur $\mathbb{R}$.

2

- $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc Φ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
- En effectuant de changement de variable $u = -t$, on montre que Φ est impaire sur $\mathbb{R}$.

2° Montrer que Φ est développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer ce développement. Préciser le rayon de convergence.

3

- $\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0, $R = +\infty$.

- $\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ et, puisque $\Phi(0) = 0$, donc

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, \quad R = +\infty.$$

3° a- Montrer que l'application $\Psi : x \mapsto \Psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \Phi(x)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.

1

Ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle

$$y' - 2xy = 1. \quad (E)$$

b- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(2)

Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R = +\infty$.

• y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n)!} x^{2n} \underset{n \mapsto n+1}{=} 1 + 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n+1)!}{(2n+2)!} x^{2n+1} = 1 + 2xy.$$

• y et Ψ sont solutions de (E) et vérifient $y(0) = \Psi(0) = 0$. Donc $y \equiv \Psi$.

4° a- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi^2(x) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

(4)

On pose $\psi(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

• $\Omega : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

• $\frac{\partial \Omega}{\partial x} : (x, t) \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

• ψ est donc C^1 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt \underset{u=xt}{=} -2\Phi'(x)\Phi(x)$.

• Donc, $x \mapsto \psi(x) + \Phi^2(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

• $\psi(0) + \Phi^2(0) = \psi(0) = 1$.

b- Montrer que

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt = 0.$$

(2)

On a $0 \leq \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \leq \frac{4}{\pi} e^{-x^2} \underset{x \mapsto +\infty}{\rightarrow} 0$.

c- En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(1)

$\lim_{x \mapsto +\infty} \Phi^2(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \mapsto +\infty} \Phi(x) = 1$ (Φ est positive) et puisque $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5° a- Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

(1)

$$1 - \Phi(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

b- En déduire que

$$1 - \Phi(x) \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}}.$$

(2)

Soit $U(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}}$, $x \geq 1$.

• $U'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left[2 + \frac{1}{x^2} \right] \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

• $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

- Par intégration, on obtient

$$\int_x^\infty U'(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \implies U(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \Phi(x).$$

(On pourra aussi montrer, par intégration par parties, que $\forall x > 0$,

$$1 - \Phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt.)$$

6° Soit $\mathcal{L}(\Phi)$ la transformée de Laplace de Φ définie par

$$\mathcal{L}(\Phi)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \Phi(t) dt.$$

Montrer que $\mathcal{L}(\Phi)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$,

$$\mathcal{L}(\Phi)(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{x^2}{4}} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{2}\right) \right).$$

(3)

- On a $\forall x > 0, 0 \leq \Phi(x) \leq 1$ donc $t \mapsto e^{-xt}\Phi(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Par intégration par parties, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \Phi(t) dt = -\frac{1}{x} [e^{-tx} \Phi(t)]_0^{+\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{-t^2} dt = \frac{e^{\frac{x^2}{4}}}{x} \int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{x}{2})^2} dt.$$

On pose $u = t + \frac{x}{2}$ dans la dernière intégrale, on obtient

$$\mathcal{L}(\Phi)(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{x^2}{4}} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{2}\right) \right).$$

7° a- Montrer que la fonction $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(3)

On pose $F: (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}, (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$

- F est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$
- $(x,t) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \left| F(x,t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$: intégrable sur $[0, +\infty[.$
- $\forall [a,b] \subset]0, +\infty[, \forall x \in [a,b], \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2}$: intégrable sur $[0, +\infty[.$

b- Montrer que $\forall x \geq 0$,

$$f(x) = e^x (1 - \Phi(\sqrt{x})).$$

(4)

- On a $\forall x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+t^2 - 1) e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}.$$

- On pose $\tilde{f}(x) = e^x (1 - \Phi(\sqrt{x}))$. On a $\tilde{f}'(x) = f'(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}.$
- $f - \tilde{f}$ est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0, x > 0.$
- $f(0) = \tilde{f}(0) = 0$. f et $\tilde{f}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ donc $f \equiv \tilde{f}.$

Partie II: (23 points)

On pose

$$\omega(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \omega^{(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

où $\omega^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de ω .

1° Calculer $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.

$$H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2 \text{ et } H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

(3)

2° a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

(2)

$$H'_n(x) = \frac{d}{dx} \left[(-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}(x) \right] = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynômiale. Préciser le degré et le coefficient dominant de H_n .

(3)

Par récurrence, on a H_n est une fonction polynômiale de degré n de coefficient dominant $a_n = 2^n$.

c- Montrer que $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$. En déduire la valeur de $H_{2n+1}(0)$.

(2)

- $H_n(-x) = (-1)^n e^{x^2} \omega^{(n)}(-x) = (-1)^n e^{x^2} (-1)^n \omega^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x).$
- $H_{2n+1}(0) = 0.$

3° Soit $G(x, t) = e^{2xt - t^2}$, $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

a- Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier pourquoi $t \mapsto G(x, t)$ est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence.

(2)

$t \mapsto e^{2xt - t^2}$ est le produit de deux fonctions d. s. e. au voisinage de 0 à rayons infinis. Donc $t \mapsto e^{2xt - t^2}$ est d. s. e. au voisinage de 0 et $R = +\infty$.

b- En remarquant que $G(x, t) = e^{x^2} \omega(x - t)$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

(2)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(x, t) \Big|_{t=0}}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{x^2} \frac{\frac{\partial^n}{\partial t^n} (\omega(x - t)) \Big|_{t=0}}{n!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{x^2} \omega^{(n)}(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \end{aligned}$$

c- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

(2)

Pour $x = 0$, on a

$$G(0, t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(0)}{(2n)!} t^{2n}.$$

Par identification

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

d- Vérifier que $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) - 2(x - t)G(x, t) = 0.$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = (2x - 2t)e^{2xt - t^2} = (2x - 2t)G(x, t).$$

(1)

e- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

(2)

$$\bullet \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n.$$

$$\bullet (2x - 2t)G(x, t) = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} \\ = 2x + \sum_{n=1}^{\infty} (2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)) \frac{t^n}{n!}.$$

• Par identification, on obtient $H_1(x) = 2x$ et

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

f- Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

(2)

On a

• D'après 3° e- $2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)$.

• D'après 2° a- $2xH_n(x) = H'_n(x) + H_{n+1}(x)$.

Donc $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

g- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

(2)

En dérivant l'égalité $2xH_n(x) - H'_n(x) = H_{n+1}(x)$, on obtient

$$2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x) = H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x).$$

D'où

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Partie III (26 points)

On pose

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2itx} dt.$$

1° a- Quel est le domaine de définition de g .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto |e^{-t^2} e^{2ixt}| = e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

(1)

b- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition. Exprimer ses dérivées successives sous formes intégrales.

On considère $\mathcal{G} : (x, t) \mapsto e^{-t^2} e^{2ixt} (x, t) \in \mathbb{R}^2$.

• L'application $\mathcal{G}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{\partial^n \mathcal{G}}{\partial x^n}(x, t) = (2it)^n e^{-t^2} e^{2ixt}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\left| \frac{\partial^n \mathcal{G}}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq 2^n t^n e^{-t^2} : \text{intégrable sur } \mathbb{R}.$$

• g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (2it)^n e^{-t^2} e^{2itx} dt.$$

(3)

c- Montrer que g vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$.

On a

$$g'(x) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} e^{2itx} dt \stackrel{\text{I.P.P.}}{=} \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} e^{2itx} \right]_{-\infty}^{+\infty} + ix \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2itx} dt \right\}.$$

Donc $g'(x) = -2xg(x)$. D'où $g(x) = \lambda e^{-x^2}$. Comme $g(0) = 1$, on aura $g(x) = e^{-x^2}$.

d- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{(2i)^n}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n e^{2itx} dt.$$

En calculant la dérivée d'ordre n de g de deux façons et en multipliant par $(-1)^n e^{x^2}$, on obtient

$$\underbrace{(-1)^n e^{x^2} g^{(n)}(x)}_{H_n(x)} = (-1)^n \frac{(2i)^n}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n e^{2itx} dt.$$

(2)

2° a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) dt.$$

(2)

$$\begin{aligned} H_{2n}(x) &= \frac{(2i)^{2n}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2tx) dt + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} \sin(2tx) dt}_{=0} \right) \\ &= (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) dt. \end{aligned}$$

b- Déterminer la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(2)

On a $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt.$

D'autre part $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$

On obtient

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi} n!}{(2n)! 2^{2n+1}}.$$

c- Montrer que $\forall x, u \in \mathbb{R},$

$$\frac{2}{\sqrt{1+u^2} \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{1+u^2}} \cos(2xt) dt = g(\sqrt{1+u^2} x).$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{1+u^2} \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{1+u^2}} \cos(2xt) dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \cos(2x\sqrt{1+u^2}v) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} e^{2ix\sqrt{1+u^2}v} dv = g(\sqrt{1+u^2} x). \end{aligned}$$

d- Montrer que $\forall x, u \in \mathbb{R},$

$$e^{-u^2 x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{2^{2n} n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} H_{2n}(x).$$

(4)

D'après 2-a,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{2^{2n} n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} H_{2n}(x) = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) dt.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N},$

$$f_n(t) = \frac{e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) u^{2n}}{n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

• $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto \frac{\cos(2xt)}{\sqrt{1+u^2}} e^{-\frac{t^2 u^2}{1+u^2}}.$

• $|f_n(t)| \leq \frac{|u|^{2n}}{n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} e^{-t^2} t^{2n}$: intégrable sur $[0, +\infty[.$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f_n(t)| dt &\leq \frac{u^{2n}}{n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} I_n \\ &= \frac{u^{2n}}{(1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{\pi}}{(2n)! 2^{2n+1}} = \alpha_n. \end{aligned}$$

$\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ converge ($\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{2^{2n} n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} H_{2n}(x) &= \frac{2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tu)^{2n}}{n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{2e^{x^2}}{\sqrt{1+u^2} \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) e^{\frac{t^2 u^2}{1+u^2}} dt \\ &= e^{x^2} e^{-u^2 x^2 - x^2} = e^{-u^2 x^2} \end{aligned}$$

3° a- Calculer, après avoir justifié l'existence, la valeur de l'intégrale

$$J_n = \int_0^{\infty} \frac{u^{2n}}{(1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} du, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3

Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\infty} \frac{u^{2n}}{(1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} du \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{(1+u^2)^{-n-\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} u^{2n-1} \right]_0^{\infty} + \frac{2n-1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{u^{2n-2}}{(1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} du \right\} \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} J_{n-1}. \end{aligned}$$

$$J_0 = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du = \int_{u=\text{sh}t}^{\infty} \frac{dt}{\text{ch}^2 t} = \left[\frac{\text{sh}t}{\text{ch}t} \right]_0^{\infty} = 1.$$

D'où

$$J_n = \frac{1}{2n+1}$$

b- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x^2} (1 - \Phi(x)) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{2^{2n} n! (2n+1)}.$$

4

On multiplie la relation 2 d- par $\frac{1}{1+u^2}$ et on intègre par rapport à u sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 u^2}}{1+u^2} du = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{2^{2n} n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} H_{2n}(x) du.$$

On pose

$$g_n(u) = \frac{(-1)^n u^{2n}}{2^{2n} n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} H_{2n}(x)$$

- D'après 2 d-, $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $(u \mapsto \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2})$.
- $u \mapsto |g_n(u)|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- $\int_0^{\infty} |g_n(u)| du \leq \int_0^{\infty} \frac{u^{2n}}{2^{2n} n! (1+u^2)^{n+\frac{1}{2}}} du = \frac{J_n}{2^{2n} n!} = \frac{1}{2^{2n} n! (2n+1)}.$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{2n} n! (2n+1)}$ converge.

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 u^2}}{1+u^2} du &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x) \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(1+u^2)^{n+\frac{3}{2}}} du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x) J_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n} n!} H_{2n}(x).\end{aligned}$$

Puisque pour tout $x > 0$ $e^x(1 - \Phi(\sqrt{x})) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2} du$, (Partie I- 7), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x^2}(1 - \Phi(x)) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \frac{H_{2n}(x)}{2n+1}.$$

Partie IV (23 points)

On pose

$$U_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1° a- Montrer que U_n est une solution de l'équation différentielle,

$$y'' + (2n+1)y = x^2 U_n(x). \quad (E_n)$$

On a

- $U_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$
- $U'_n(x) = (-xH_n(x) + H'_n(x)) e^{-\frac{x^2}{2}}.$
- Donc

$$\begin{aligned}U''_n(x) &= (x^2 H_n(x) - H_n(x) - xH'_n(x) + H''_n(x) - xH'_n(x)) e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= (x^2 - 2n - 1) e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).\end{aligned}$$

b- Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$(U'_n U_m - U'_m U_n)' + 2(n-m)U_n U_m = 0.$$

Puisque U_n et U_m sont, respectivement, solutions de (E_n) et (E_m) on aura,

$$(U'_n U_m - U'_m U_n)' = U''_n U_m - U''_m U_n = 2(m-n)U_n U_m.$$

c- En déduire que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0.$$

On intègre la relation précédente sur $] -\infty, +\infty[$.

d- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$H_n^2(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) = 2nH_{n-1}^2(x).$$

(3)

On a $\forall n \geq 1$,

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

Donc $\forall n \geq 2$,

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0.$$

On multiplie par $H_n(x)$,

$$H_n^2(x) - 2xH_{n-1}(x)H_n(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)H_n(x) = 0.$$

On remplace $2xH_n(x)$ par $(H_{n+1} + 2nH_{n-1}(x))$, on obtient

$$H_n^2(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) = 2nH_{n-1}^2(x).$$

e- En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

(3)

On intègre la relation précédente sur $]-\infty, +\infty[$ on obtient, $\forall n \geq 2$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx.$$

Par itération, on aura $\forall n \geq 2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^{n-1} n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = 2^{n-1} n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} 4x^2 dx \stackrel{I.P.P.}{=} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

La relation précédente reste vraie pour $n = 0, 1$ ($H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$).

2° Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$h(x) = \int_0^x \varphi(x, t) dt.$$

Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \varphi(x, x) + \int_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt.$$

(3)

On pose $H(x, y) = \int_0^y \varphi(x, t) dt$.

• y fixé. φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Donc $x \mapsto H(x, y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt.$$

• x fixé. $t \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc $y \mapsto H(x, y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \varphi(x, y).$$

• H est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

• $h(x) = H(x, x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$h'(x) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, x) + \frac{\partial H}{\partial x}(x, x) = \varphi(x, x) + \int_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt.$$

3° a- Montrer que R_n est solution de l'équation différentielle (E_n) .

(2)

- Soit $\varphi(x, t) = t^2 U_n(t) \sin(\sqrt{2n+1}(x-t))$, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
 $\Rightarrow R_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$R'_n(x) = \underbrace{\varphi(x, x)}_{=0} + \int_0^x t^2 U_n(t) \cos(\sqrt{2n+1}(x-t)) dt.$$

- $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
 $\Rightarrow R_n$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} R''_n(x) &= x^2 U_n(x) - \sqrt{2n+1} \int_0^x t^2 U_n(t) \sin(\sqrt{2n+1}(x-t)) dt \\ &= x^2 U_n(x) - (2n+1) R_n(x). \end{aligned}$$

b- Montrer que U_n vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$U_n(x) = H_n(0) \cos(\sqrt{2n+1}x) + H'_n(0) \frac{\sin(\sqrt{2n+1}x)}{\sqrt{2n+1}} + R_n(x).$$

(3)

On pose

$$V_n(x) = H_n(0) \cos(\sqrt{2n+1}x) + H'_n(0) \frac{\sin(\sqrt{2n+1}x)}{\sqrt{2n+1}} + R_n(x).$$

- V_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
 - V_n est une solution de (E_n) .
 - $V'_n(0) = H'_n(0) = U'_n(0)$ et $V_n(0) = H_n(0) = U_n(0)$
- $\Rightarrow V_n = U_n$ pour tout entier n .

4° a- En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, Montrer que $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{10}} \frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt{2n+1}} x^{\frac{5}{2}}.$$

(2)

On a $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\int_0^x t^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x U_n^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{x^5}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} H_n^2(t) e^{-t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{2^n n! \sqrt{\pi}}{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{10}} \frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt{2n+1}} x^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

b- En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, montrer que $\forall x \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(2n)!} R_{2n}(x) = 0.$$

On a $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{n!}{(2n)!} R_{2n}(x) \right| &\leq \overbrace{\frac{(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{10}} x^{\frac{5}{2}} \frac{2^n \sqrt{(2n)!}}{\sqrt{4n+1}} \frac{n!}{(2n)!}}^M \\ &= M \frac{n! 2^n}{\sqrt{(2n)!} \sqrt{4n+1}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{M \pi^{\frac{1}{4}}}{2} n^{-\frac{1}{4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

(2)